Homework assignment due at the beginning of class Wednesday, 8-4-10. Read Key 52 and consult the material below and the readings of 8-2-10.

Here are class lists for sections 202-202. Your number on the ClassList will be keyed to the assignments below.

No.	
1	Arellano, Om
2	Banks, Tiffar
3	Bonner, Ash
4	Brown, Jessi
5	Davison, An
6	Dennis, Racl
7	Drew, Timot
8	Elledge, Jorn
9	Griggs, Tenil
10	Jones, Marke
11	Keane, Kalisl
12	Kim, Takhyu
13	Lockton, Sar
14	Mattison, Ty
15	Mcbride, Em
16	Najdowski, J
17	Ruth, Megar
18	Slappey, Tyr

No.	
1	Barrons, Ju
2	Bettinghou
3	Bradley, Ke
4	Brady, Ashl
5	Brown, Asia
6	Brown, She
7	Caplan, Gra
8	Cody, Colin
9	Droscha, Je
10	Duvall, Tor
11	Kotevski, C
12	Lippett, Mic
13	Muhammad
14	Patel, Preet
15	Pham, Pho
16	Price, Gabri
17	Tule, Brenc
18	Walker, Trc

Random digits and random sampling. Random digits are statistically independent draws (i.e. equal probability **with-replacement)** from {0, 1, ..., 8, 9}. I've prepared tables of random digits for you to use.

Students listed "No. 1" on their Class List (in section 202 Barrons) are assigned the first block of random digits, which begins 876 90... (see blocks of random digits appended below). I simply want students within each section to work with different blocks of random digits, which is why there are 18 blocks of random digits, one for each student.

Your assigned block of random digits can be used to obtain a random sample. For example, you can use random digits to sample random pages from the 209 pages of the book. Barron's random digits begin

876 904 531 090 ...

They happen to be arranged in threes. She could set up a correspondence between digit triples, all of which are equally likely from 000 through to 999:

digit triplet		corresponding page
000	$\longleftrightarrow$	none
001	$\longleftrightarrow$	1
002	$\longleftrightarrow$	2
...		...
010	$\longleftrightarrow$	10
011	$\longleftrightarrow$	11
...		...
099	$\longleftrightarrow$	99
100	$\longleftrightarrow$	100
...		...
209	$\longleftrightarrow$	209
210	$\longleftrightarrow$	none
...		...
999	$\longleftrightarrow$	none

In order for each page to have the same chance of being selected we use a triplet 001 for page 1. Every page must face the same hurdle before being admitted to the sample, in this case the hurdle is to have its three digit correspondent come up.

1. With replacement equal probability sample.

a. Use your block of random digits to select an equal probability with replacement sample of $n = 30$ pages from the textbook.

b. Score each sample page (above) with x = number of times the header "KEY EXAMPLE" occurs on that page.

c. Use your sample data from (b) to determine

$\bar{x}$

s

68% z-CI for μ

In class, we will calculate the (grand) average of all 18 students' values for sample mean. Although it is not the actual population mean μ it is likely to be very close. We'll see if around 68% of the classes' z-CI cover this grand average.

2. Without replacement equal probability sample.

Set up the 2-digit correspondence 01⟷page 1, ..., **87**⟷page 87, ... other pairs⟷none.

Starting again at the beginning of your block of random digits peruse consecutive **pairs** of random digits, selecting random pages from only pages 1 through 87 of the textbook. Student #1 has digits beginning

876 904 531 090 491 806 584 704 102 709 ...

Grouping into consecutive **pairs**

87 69 04 53 10 90 49 18 06 58 47 04 10 27 ...

see that 04 occurs twice. If we want to sample with equal probability all we have to do is skip over any duplicate. That is, if we skip all repeats of 04 the remaining unseen page numbers the unseen page numbers remain equally likely to get into the sample.

So the student above obtains equal probability without replacement sample pages from the range 01 through 87 beginning as follows:

digit pairs:	87	69	04	53	10	90	49	18	06	58	47	04	10	27	...
page selected:	87	69	4	53	10		49	18	6	58	47			27	...

a. Use your block of random digits to select an equal probability with**OUT** replacement sample of n = 30 pages from the textbook.

b. Score each sample page (above) with x = number of times you see (in capital letters) "KEY EXAMPLE" on that page.

c. Use your sample data from (b) to determine

$\overline{x}$

s

68% z-CI for μ

Note: In class, we will calculate the (grand) average of all 18 students' values for sample mean. Although it is not the actual population mean μ it is likely to be very close to μ. We'll see if around 68% of the class' z-CI cover this grand average.

3. Achieving a given precision by choosing a large sample. Key 52 discusses how to choose sample size n in order to ensure that a 95% z-CI (in with replacement case) is not too wide. The form is:

$$\overline{x} \pm 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Unfortunately, you don't know what s will be until you get data. What to do? Take a preliminary sample. Estimate σ by means of the sample standard deviation s_{prelim} **of this preliminary sample.** If

$$1.96\, \boldsymbol{s}_{\mathbf{prelim}} / \sqrt{n_{prelim}} \leq W$$

then you are done since your regular z-CI already has the desired narrowness specified by W. Otherwise, solve for n_{final} in

$$1.96 \frac{s_{prelim}}{\sqrt{n}} = W \text{ (W being any desired half-width)}$$

i.e. $\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}} = (1.96\, s_{\text{prelim}} \,/\, W)^2$

Then continue sampling to the larger sample size n_{final}. Your 95% z-CI is then (approximately)

$\overline{x_{\text{final}}} \pm W$

which is what you wanted to achieve.

Be prepared to suffer large $\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}}$ if you want W to be small (precise CI).

a. An experimenter wishes to estimate the mean failure pressure (psi) for a particular type of tire. They would like a 95% z-CI of the precision

$\overline{x} \pm 10$ psi

A preliminary sample of 100 tires produces a sample standard deviation of $s_{\text{prelim}} = 42$ psi.

Determine the recommended total sample size

$$\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}} = (1.96\, s_{\text{prelim}} \,/\, W)^2$$

Check that the recommended $\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}}$ is not greater than 100. It means that the needed precision has already been achieved. Therefore, give the ordinary z-CI from the data already in hand if it is found that $\overline{x_{\text{prelim}}} = 192.32$ psi.

b. With the data of (a), suppose we really desire a 95% z-CI of $\overline{x_{\text{final}}} \pm 1$ psi and are perhaps willing to employ the hybrid method. Determine

$$\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}} = (1.96\, s_{\text{prelim}} \,/\, W)^2$$

c. Suppose that you have continued to the recommended total sample size $\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}}$ (you were allowed to include the initial 100 sample values) and your sample mean of all $\boldsymbol{n}_{\mathbf{final}}$ scores is $\overline{x_{\text{final}}} = 193.84$. Give the hybrid z-CI

$\overline{x_{\text{final}}} \pm 1$ psi

d. What margin of error will you quote for the hybrid method?

Blocks of random keyed to position in the ClassList.

1

876 904 531 090 491 806 584 704 102 709 291 034 862 346 865 461 522 425 713 009 872 399 431 142 702 706 623 ⋱

908 601 686 414 082 760 380 118 551 365 139 952 907 775 492 829 275 463 944 042 003 670 756 328 396 300 610
697 654 120 393 805 422 035 983 263 886 154 688 475 500 733 368 951 519 286 265 462 774 805 410 069 064 716
558 866 314 154 760 732 439 373 427 442 873 286 695 843 233 998 332 427 582 682 103 681 734 533 882 326 020
348 291 136 774 748 874 602 590 803 873 592 300 429 483 757 701 494 378 361 311 444 417 624 442 463 154 705
882 195 527 120 899 206 135 501 091 272 454 250 163 536 618 581 353 130 727 537 584 407 324 357 552 746 306
978 276 014 116 036 086 019 797 511 690 333 783 459 873 835 858 302 600 755 458 282 586 757 358 119 777 081
315 328 286 869 435 370 596 180 895 102 089 584 037 814 547 951 282 606 055 171 473 605 912 672 201 228 256
072 626 323 610 274 461 698 823 146 533 276 368 976 503 494 675 481 225 409 781 028 648 019 708 621 903 942
347 996 405 702 876 601 799 196 395 400 498 823 840 608 111 638 137 422 512 183 310 833 586 191 766 233 613
764 348 100 848 248 864 472 505 253 335 544 597 529 637 570 375 378 595 895 363 289 668 505 992 758 971 065
540 341 644 415 303 752 414 584 278 054 002 211 537 625 578 733 037 941 327 819 640 916 828 571 695 106 765
853 711 372 446 962 053 995 196

2

973 469 987 555 731 794 572 964 195 108 218 249 193 079 648 126 944 569 873 300 790 190 429 724 235 904 219
899 256 445 022 749 743 864 511 186 321 658 252 189 901 376 279 969 830 801 445 028 000 653 713 443 892 261
159 680 527 082 803 505 798 166 780 021 722 504 317 650 017 035 603 717 645 027 906 240 195 311 947 248 345
235 060 660 586 937 087 508 855 012 918 830 187 749 887 703 569 376 008 807 793 151 812 516 256 820 698 000
118 791 659 758 984 183 150 131 138 065 408 557 818 480 183 554 418 280 724 967 993 058 401 210 830 054 461
140 835 241 656 154 588 588 293 253 662 801 785 281 603 035 918 137 966 933 999 702 779 303 604 960 540 284
400 307 051 145 102 639 488 058 952 243 265 449 134 505 372 736 687 600 577 248 871 311 030 815 066 292 086
184 290 432 053 891 305 000 258 847 027 967 833 605 261 740 547 109 742 857 015 304 490 179 410 209 016 838
558 008 894 888 441 716 878 721 487 029 844 209 061 528 086 431 688 349 344 262 540 626 285 027 362 801 056
356 577 592 775 746 526 859 738 852 236 047 525 205 526 301 794 827 179 374 569 752 185 091 521 984 617 468
259 149 213 050 362 727 298 451 608 299 864 129 998 160 338 168 408 917 390 689 312 191 029 277 379 690 970
057 405 469 711 732 250 183 835 833 381 563 096 845 350 164 933 502 847 648 814 703 231 320 749 652 303 645
292 234 466 856 464 260 709 052 476

3

819 793 255 402 800 125 938 205 553 004 500 543 466 662 292 800 582 909 726 560 561 116 072 257 105 288 052
009 867 350 821 845 706 167 122 206 799 735 955 722 683 457 832 895 236 443 638 646 542 931 900 309 918 702
959 680 562 477 501 685 177 775 341 373 197 806 042 525 097 053 263 865 073 260 582 751 056 300 374 632 121
895 981 601 105 108 334 216 072 949 159 911 637 668 460 421 997 207 192 403 617 475 359 420 426 138 773 611
729 316 792 075 214 218 188 311 227 322 802 185 278 293 248 062 247 947 290 417 459 552 870 434 426 143 223
344 861 011 099 188 060 827 355 859 191 853 393 448 363 022 265 719 268 121 159 103 117 344 901 445 469 739
707 778 887 023 661 167 506 449 034 353 237 982 435 404 025 457 739 565 848 471 554 918 961 435 901 182 214
367 554 894 629 365 586 476 788 947 519 490 449 525 300 574 208 427 215 378 092 600 947 196 728 670 803 953
854 533 225 912 231 563 908 686 806 118 758 677 082 667 208 789 257 083 657 199 653 959 127 655 662 274 706
109 093 509 752 039 724 526 026 764 172 675 756 452 438 815 249 143 257 175 551 559 510 815 384 936 727 357
626 138 395 272 576 332 613 296 319 424 563 492 376 678 276 928 613 759 805 258 511 977 444 217 869 928 741
421 543 769 326 653 384 324 227 678 227 105 747 194 859 219 774 729 316 675 958 172 508 244 455 628 564 609
801 485 817 994 698 010 698 479 549

4

6 220 602 809 540 737 442 516 638 220 263 325 813 545 609 653 864 736 268 687 513 192 957 632 349 977 176 534
803 324 748 390 436 246 544 838 721 577 222 068 067 264 957 729 631 717 799 548 643 282 216 004 034 433 236
120 358 078 353 323 338 630 609 277 605 088 148 100 459 692 037 580 602 782 228 527 702 753 184 348 860 870
133 367 483 081 253 417 164 275 584 742 697 348 277 576 848 392 903 721 956 644 491 367 890 123 174 761 531
103 138 679 753 751 882 071 431 461 200 750 359 210 587 639 197 029 824 485 012 775 731 486 181 576 383 931
733 099 344 342 835 262 750 016 587 979 589 416 858 800 890 486 413 541 912 914 151 466 553 556 351 294 359
069 216 000 529 461 068 643 924 733 472 612 335 170 657 478 891 086 102 883 353 150 475 399 790 423 295 362
165 632 934 648 436 244 652 339 947 184 431 474 169 172 648 592 890 982 220 908 180 570 556 084 523 227 651

289 212 352 817 770 943 161 955 992 895 775 238 504 409 606 329 342 274 660 485 406 396 887 318 654 713 764
258 295 913 014 559 370 829 644 738 858 923 764 425 839 270 883 372 193 618 488 824 187 439 303 320 621 346
211 695 926 076 856 522 488 220 218 430 499 549 136 981 486 099 042 546 341 707 069 972 387 737 531 369 234
541 281 579 163 593 054 553 812 631 734 772 886 260 527 987 999 858 877 490 015 394 422 945 701 861 351 959
500 870 752 821 249 558 588 026 165

5

1 832 653 313 911 937 050 082 936 570 396 956 159 680 011 695 947 166 748 792 609 516 074 766 300 791 123 981
470 878 453 147 151 217 090 563 846 813 896 922 510 172 396 770 581 226 734 400 156 620 792 990 874 486 441
536 182 887 149 125 981 715 764 062 521 564 168 908 883 156 538 593 145 778 796 051 675 154 398 215 312 567
389 582 809 753 187 590 823 409 778 842 392 081 068 523 030 181 487 367 749 083 658 615 224 279 119 026 532
779 370 313 461 273 828 787 979 105 648 942 880 564 577 039 331 826 821 853 523 254 733 876 814 382 420 322
074 218 034 940 702 321 278 572 784 274 252 753 466 224 307 659 323 783 667 326 539 246 127 482 570 304 879
518 251 700 962 780 318 615 893 165 246 745 422 286 645 670 155 356 753 625 289 868 725 689 880 400 009 660
489 504 818 070 779 800 945 573 561 184 501 808 577 593 403 448 308 886 063 563 144 455 271 059 595 589 634
423 439 210 397 126 092 050 061 877 417 375 593 240 806 759 033 087 165 885 449 032 740 100 483 989 314 575
740 403 200 033 427 291 100 904 202 333 780 613 322 260 483 581 591 400 439 215 487 827 134 997 966 165 562
610 519 307 246 527 053 182 239 291 129 274 595 858 408 326 387 484 725 533 062 454 041 302 763 428 936 874
920 053 026 520 035 557 309 205 173 309 415 312 168 602 640 551 688 166 925 704 683 657 754 477 785 046 201
710 136 901 823 291 643 421 880 363

6

19 744 158 994 107 804 459 692 593 575 136 663 348 010 915 846 006 510 654 648 093 482 026 919 557 597 680
911 672 450 176 369 133 614 796 414 367 360 178 102 478 836 840 461 765 512 798 066 607 184 774 221 511 824
247 173 218 895 744 088 014 036 484 480 163 799 288 650 579 092 187 973 850 635 508 555 149 199 668 163 606
876 113 384 899 607 012 072 026 226 315 514 687 536 165 072 612 664 148 855 586 798 144 997 221 936 029 202
660 003 758 640 593 816 403 227 850 996 570 598 607 889 656 951 312 314 107 282 298 619 871 684 795 973 287
097 053 703 127 275 612 024 780 623 381 291 603 384 087 921 736 414 043 824 263 961 662 485 457 183 476 211
731 053 236 349 621 290 535 061 889 563 053 304 713 124 919 452 990 499 798 289 862 724 885 218 314 451 330
048 857 767 235 176 490 972 757 144 989 996 532 586 862 379 621 491 246 455 264 290 892 451 423 746 406 044
647 818 691 609 858 159 902 891 220 760 040 767 899 186 206 460 489 818 078 718 881 749 380 351 485 966 144
349 233 975 475 849 842 628 971 109 717 560 830 069 302 836 167 616 316 392 789 913 783 955 676 002 469 080
455 345 991 162 319 963 557 237 508 913 430 679 740 487 357 796 415 083 665 091 322 572 735 489 703 151 845
773 030 874 575 517 563 659 168 908 138 518 807 999 180 204 439 442 774 893 849 100 251 494 450 794 318 904
751 172 464 756 137 434 529 507 688 593

7

462 977 689 649 188 396 020 472 226 127 346 877 108 519 626 927 357 983 442 300 200 207 841 854 819 968 416
272 672 564 191 969 814 376 546 097 486 512 650 137 208 432 379 002 997 585 916 333 534 208 276 320 812 154
481 359 414 825 535 630 489 953 432 650 259 148 390 882 916 180 042 515 180 709 544 127 580 610 080 463 693
742 602 241 543 662 851 314 737 084 032 040 171 400 288 352 280 674 489 472 923 357 717 368 165 238 605 909
262 558 567 491 284 594 854 580 506 322 520 759 065 800 968 821 778 723 513 562 026 408 582 632 953 603 284
274 965 689 765 604 973 842 698 024 870 826 305 920 172 219 656 744 718 032 088 009 635 070 001 463 973 632
584 586 880 580 642 677 854 896 536 336 382 903 210 517 343 666 647 828 896 836 518 305 971 139 877 835 830
346 775 874 650 997 161 358 586 869 713 385 770 892 341 904 938 941 433 421 084 106 192 151 056 619 116 417
674 099 489 071 977 721 637 786 343 939 051 388 704 658 992 010 457 168 941 152 084 327 381 861 856 551 187
948 083 659 833 997 561 361 237 922 112 604 443 309 878 480 014 515 634 218 918 924 467 225 343 194 302 448
450 557 794 820 948 178 869 605 548 326 422 635 600 826 856 301 371 377 948 354 595 640 740 176 299 498 874
030 362 107 576 746 623 638 849 786 296 285 719 118 223 200 163 150 392 071 690 647 805 377 886 253 895 759
037 609 481 908 084 540 926 078 378

8

749 588 235 455 044 752 219 156 056 946 263 562 867 630 993 509 943 400 414 896 635 406 309 762 271 680 286
219 118 933 699 235 145 004 398 713 836 698 185 192 706 791 105 426 753 604 806 742 688 564 682 184 713 546

115 890 896 172 995 109 323 519 203 121 138 233 832 367 473 348 565 539 601 636 838 544 597 167 151 265 676 ⋱
514 313 803 519 468 568 955 753 427 671 318 266 419 986 929 047 882 637 150 017 274 769 282 258 707 055 089 ⋱
352 047 790 906 836 681 914 187 242 931 773 973 914 545 783 186 691 409 496 126 890 501 876 394 705 548 777 ⋱
119 182 705 107 414 349 580 483 850 481 160 751 386 179 410 162 607 688 874 521 434 293 173 429 884 807 086 ⋱
230 534 576 905 496 740 837 037 121 926 997 992 195 247 011 923 650 377 825 223 912 520 398 913 716 974 531 ⋱
346 734 917 376 986 123 628 423 720 121 596 062 060 857 226 493 817 740 613 225 673 399 518 742 135 361 093 ⋱
558 405 049 286 011 292 042 255 610 946 800 226 863 140 208 441 726 615 432 383 000 535 495 705 625 999 257 ⋱
363 454 860 868 450 945 267 247 003 343 162 105 322 460 898 843 913 645 101 383 561 016 051 113 920 630 068 ⋱
563 020 647 013 458 302 720 499 487 548 838 630 917 735 681 349 509 607 387 977 559 266 972 134 367 019 739 ⋱
764 046 108 145 739 053 236 293 207 468 885 361 409 892 414 494 870 688 772 463 136 313 999 013 057 410 514 ⋱
670 877 434 359 632 124 626 072 229

9

6 515 596 919 896 851 441 516 392 527 119 724 117 047 332 318 792 932 132 480 673 992 761 748 616 435 376 161 ⋱
184 517 100 249 602 914 831 606 299 601 068 873 355 264 627 726 178 610 697 714 955 461 000 112 866 758 203 ⋱
652 048 700 712 455 957 853 475 853 668 786 458 522 939 812 294 793 876 594 629 423 707 350 330 863 560 122 ⋱
951 735 476 789 482 694 153 673 909 441 922 612 072 530 098 670 984 799 870 118 545 742 898 344 058 154 208 ⋱
862 182 603 976 099 064 890 923 055 972 962 987 031 834 100 225 539 085 136 292 226 518 904 595 451 511 417 ⋱
595 764 546 147 491 315 314 527 117 735 217 775 835 997 203 076 034 192 307 544 556 608 407 453 319 305 908 ⋱
934 847 823 734 421 762 218 908 391 724 037 323 935 223 039 285 570 907 296 221 785 647 616 845 364 596 221 ⋱
629 341 946 967 530 565 922 501 715 653 474 763 815 988 466 112 723 239 929 932 362 350 523 400 895 406 077 ⋱
578 837 819 946 159 301 594 772 098 339 089 196 694 293 641 270 269 700 828 803 487 254 412 054 010 962 931 ⋱
787 058 620 765 221 698 234 658 113 506 518 703 761 133 873 439 686 655 804 973 255 706 079 573 880 653 496 ⋱
078 239 432 419 355 890 345 379 590 987 408 373 983 468 350 537 981 278 429 427 358 509 591 696 751 148 094 ⋱
814 836 488 195 807 180 686 320 709 620 089 441 492 168 068 560 405 110 318 231 190 850 371 700 086 096 308 ⋱
115 469 511 287 045 912 281 165 870

10

003 387 029 996 456 727 917 025 909 207 411 132 331 378 562 816 174 279 792 538 251 544 194 651 457 601 422 ⋱
256 022 037 151 832 939 568 499 590 195 547 203 336 879 166 066 375 713 105 408 955 447 522 569 525 055 349 ⋱
919 048 359 932 229 881 289 935 465 665 215 483 652 215 201 700 647 854 023 665 008 344 422 486 994 999 223 ⋱
673 520 305 897 459 542 742 164 150 452 632 815 294 304 355 233 533 856 755 203 336 062 722 581 713 320 345 ⋱
208 107 260 860 187 633 762 911 870 695 426 615 076 400 755 838 730 433 030 061 427 969 769 413 874 695 285 ⋱
842 379 426 783 043 962 781 372 597 719 277 614 236 814 672 668 021 199 088 230 053 922 147 417 463 414 633 ⋱
330 121 332 756 132 394 008 079 248 248 728 001 172 866 174 811 503 257 619 261 658 619 698 549 087 799 319 ⋱
644 843 911 000 985 246 993 642 800 869 782 631 431 865 937 898 219 971 870 874 989 765 132 742 225 459 439 ⋱
211 465 451 123 918 514 353 599 527 517 774 684 915 464 693 845 046 111 631 788 175 503 837 728 392 648 103 ⋱
125 733 990 794 008 934 869 196 662 023 259 354 147 048 143 688 156 887 567 609 105 681 906 445 383 308 008 ⋱
198 920 205 746 219 314 409 541 347 710 681 392 790 316 618 618 062 232 557 117 835 126 459 470 184 659 583 ⋱
214 744 871 190 078 694 139 661 251 652 410 856 744 474 207 012 950 146 234 384 209 189 983 586 808 109 385 ⋱
088 147 905 558 941 850 667 299 731

11

874 435 266 762 484 768 478 540 781 514 972 269 733 357 288 312 142 140 154 071 919 405 760 475 081 170 102 ⋱
960 300 271 986 610 278 587 412 041 760 510 720 514 577 860 613 304 777 704 773 523 770 873 523 887 686 160 ⋱
149 071 460 182 727 793 124 463 134 411 052 068 429 083 705 189 785 722 539 916 932 928 652 060 984 449 819 ⋱
204 474 021 089 673 174 656 035 706 076 976 868 951 480 085 927 558 756 909 976 405 793 596 771 127 449 817 ⋱
089 291 693 971 824 345 757 393 780 486 792 080 351 758 062 728 654 072 651 385 203 180 080 942 070 129 392 ⋱
874 286 677 302 923 935 075 512 837 341 027 125 317 480 572 857 901 674 742 294 658 333 139 062 814 743 003 ⋱
866 972 609 168 720 110 956 317 428 558 078 255 466 496 193 066 117 311 440 178 208 624 179 432 286 325 101 ⋱
767 687 103 513 980 446 803 861 540 978 033 169 928 272 705 647 733 161 530 866 892 652 889 356 541 260 343 ⋱
479 601 107 032 591 801 635 399 062 483 643 879 054 485 059 111 993 574 506 616 626 625 680 341 762 325 212 ⋱
211 212 748 297 391 928 887 347 482 239 879 431 712 227 636 950 977 894 801 587 849 631 599 363 485 472 861 ⋱

584 085 580 058 858 885 668 165 335 239 737 009 630 249 239 346 234 606 727 400 178 264 529 560 822 324 576 \
083 313 775 425 897 878 682 430 430 757 986 369 383 543 889 756 796 596 699 640 028 897 382 983 490 029 641 \
957 702 646 971 857 341 390 323 621

12

033 130 357 210 448 590 155 681 267 911 107 848 219 683 122 218 533 950 969 464 136 296 966 451 625 726 285 \
646 772 261 409 803 416 069 494 311 357 267 745 977 043 511 030 889 675 809 855 890 930 510 811 567 641 525 \
448 134 328 089 886 953 003 451 788 988 916 777 792 268 457 238 850 165 205 472 651 795 719 676 624 134 362 \
263 176 513 671 653 698 627 724 039 335 871 734 394 368 386 723 260 237 064 985 378 184 595 137 868 290 915 \
317 695 453 437 555 705 738 540 955 205 067 573 079 030 051 898 652 845 216 363 691 299 040 846 073 794 476 \
596 357 436 658 117 227 935 945 687 298 526 599 642 850 517 163 131 326 604 471 185 610 207 738 090 918 993 \
096 057 299 795 489 614 469 716 027 214 809 701 441 122 365 481 164 800 448 406 746 721 538 879 575 782 699 \
429 656 666 413 115 948 277 564 924 962 304 765 746 522 038 428 207 897 205 188 558 249 206 271 352 389 539 \
377 704 324 212 905 553 136 875 751 916 748 804 955 020 448 128 336 358 770 308 796 174 197 958 120 135 923 \
555 967 385 928 491 007 932 272 462 709 626 951 036 953 206 064 288 644 393 902 260 773 406 088 899 876 930 \
499 385 303 908 115 853 525 411 346 052 337 124 152 781 731 757 087 334 858 062 485 398 743 798 997 983 507 \
995 578 984 730 302 769 196 329 023 720 397 046 662 939 833 980 428 070 741 653 944 339 925 782 450 874 223 \
219 205 643 758 494 688 133 270 538

13

992 770 702 033 511 596 735 911 951 474 892 109 742 081 100 932 866 644 719 057 594 497 660 251 767 531 869 \
513 003 479 188 330 501 997 155 282 559 420 085 681 636 814 358 307 194 822 703 580 246 136 733 980 632 494 \
124 466 099 622 447 331 076 113 541 241 193 797 528 721 924 542 467 910 515 035 854 125 943 213 556 953 723 \
105 035 089 277 302 934 564 812 706 992 882 047 473 120 606 844 120 294 783 879 016 383 699 997 597 888 941 \
965 055 585 393 944 699 014 195 349 366 191 151 834 018 398 624 031 518 239 704 447 383 153 422 342 948 479 \
937 829 201 322 868 471 984 433 592 125 172 434 372 683 231 042 735 768 007 775 633 545 168 534 209 033 556 \
442 397 889 109 555 897 597 912 348 141 895 073 786 171 262 562 816 993 185 902 651 397 203 374 481 512 082 \
240 203 005 580 954 736 700 188 711 678 420 277 515 997 128 100 428 087 214 729 911 750 571 195 570 319 311 \
232 817 421 994 717 572 156 161 522 792 100 983 388 608 141 166 687 507 580 184 724 845 632 074 715 660 550 \
205 427 560 912 950 089 890 066 845 249 071 274 322 918 051 553 196 654 586 525 445 968 183 806 417 061 255 \
711 285 992 746 786 084 602 464 166 974 261 093 926 688 082 574 818 155 533 855 792 164 098 910 687 495 206 \
894 176 479 536 944 284 245 200 642 251 869 236 105 295 682 538 807 503 021 155 589 074 572 674 279 980 622 \
970 159 799 986 311 428 696 877 032

14

237 537 428 436 447 561 904 755 131 722 300 843 999 704 031 014 052 869 721 401 732 135 328 704 720 031 096 \
348 573 448 769 390 571 099 254 510 925 138 767 766 895 903 478 448 222 319 537 920 852 373 876 076 221 998 \
578 809 580 088 121 859 987 959 844 821 254 578 072 373 344 824 286 442 390 864 865 814 397 795 870 665 845 \
422 262 292 785 092 741 134 534 217 169 212 293 849 673 924 707 380 308 446 683 514 125 703 448 437 230 172 \
825 545 344 342 159 678 297 071 330 234 429 058 048 882 010 414 774 386 811 231 855 823 486 704 956 969 752 \
306 698 184 857 183 781 059 942 270 168 393 155 483 266 320 145 689 989 873 847 903 921 699 422 405 875 041 \
785 764 757 704 557 814 896 695 247 969 368 134 782 661 706 055 143 767 419 872 468 910 843 623 641 608 804 \
326 097 627 831 796 411 153 237 966 880 937 763 532 036 501 968 828 553 966 362 036 817 006 105 735 970 076 \
428 019 431 776 376 251 125 639 721 519 216 485 777 325 686 145 124 790 309 267 725 559 037 977 206 485 427 \
664 975 904 049 148 235 775 245 234 431 630 052 962 788 103 742 925 107 776 797 107 268 335 776 602 155 513 \
876 261 299 765 257 943 668 207 060 565 108 285 610 952 940 558 583 339 357 468 189 758 427 264 360 843 158 \
197 894 287 109 198 705 045 956 174 494 017 482 805 965 693 894 795 656 517 623 497 973 332 497 841 156 523 \
179 090 178 311 475 460 721 793 529

15

945 678 019 752 665 982 585 068 156 567 875 994 917 949 035 889 528 698 621 740 617 108 421 437 440 421 844 \
588 912 747 908 915 054 407 543 909 909 956 200 601 478 566 451 546 999 609 029 993 614 142 039 790 690 814 \
797 549 126 789 449 438 410 701 104 089 873 160 177 478 022 902 411 495 912 226 600 078 698 554 009 130 463 \
002 359 093 595 665 523 477 821 882 687 681 296 693 212 064 527 792 257 977 720 547 196 276 767 580 652 312 \

721 047 000 500 700 052 202 557 968 371 811 495 541 828 221 813 547 882 693 457 173 434 561 492 397 509 961
497 881 448 188 636 937 960 658 930 105 010 755 579 702 235 896 061 638 112 232 639 605 091 419 080 449 640
441 551 527 861 268 372 887 525 697 948 045 241 471 906 245 951 493 229 178 780 586 422 133 233 578 082 042
241 147 454 159 677 113 221 154 184 005 453 069 333 158 663 827 573 354 094 681 292 264 825 751 374 882 868
558 831 877 670 048 939 965 824 829 681 805 837 659 141 935 509 656 146 940 235 775 640 174 961 043 825 610
288 682 675 149 335 308 497 810 997 129 469 749 509 946 652 906 008 969 375 972 127 416 315 719 637 360 008
405 472 873 791 440 762 386 773 002 857 575 616 161 880 465 915 260 774 978 584 975 232 170 621 725 861 046
542 784 716 800 078 381 662 460 759 459 319 840 182 086 327 869 999 842 190 843 542 246 339 200 611 953 249
523 924 368 379 152 596 832 676 496

16

580 286 765 639 249 883 629 038 395 469 961 323 174 589 896 445 777 386 805 239 632 788 972 243 937 923 659
406 409 980 777 710 722 531 855 125 289 319 910 255 695 772 562 826 842 622 762 015 419 605 777 896 599 100
423 333 024 527 998 436 823 218 014 726 865 174 115 211 999 387 755 381 638 470 440 187 077 148 820 628 983
897 443 516 889 477 170 847 031 760 788 157 223 564 455 654 037 656 553 718 122 232 292 017 594 715 365 460
597 505 646 880 752 712 492 610 198 339 891 149 839 364 688 281 494 629 229 515 193 488 413 995 709 724 421
729 576 802 289 485 670 115 124 749 872 642 424 827 405 947 494 858 840 104 700 207 208 297 400 810 765 410
191 548 444 092 224 558 869 809 961 400 049 370 689 568 283 445 884 922 779 937 112 656 114 214 802 951 052
688 118 180 075 265 696 967 781 651 596 699 620 355 217 444 201 497 532 198 416 519 131 624 471 651 682 150
532 556 675 808 537 131 393 562 427 033 504 306 399 418 688 536 391 997 576 794 591 104 264 562 133 476 170
098 401 398 637 877 347 894 059 308 308 358 930 217 958 595 646 301 222 243 890 688 224 888 893 962 718 426
736 499 927 993 117 711 897 524 998 297 892 341 490 764 300 402 688 315 002 314 230 890 892 009 456 585 402
275 003 164 181 799 033 952 941 760 938 089 685 920 879 126 837 954 419 275 995 097 131 848 200 551 210 930
452 300 781 130 028 493 300 716 088

17

592 191 689 611 207 577 445 308 085 058 050 716 790 374 439 845 344 067 190 845 361 403 888 156 110 657 478
651 804 578 097 482 804 423 164 018 603 793 224 149 342 925 421 881 461 837 579 409 504 581 664 681 321 366
427 132 210 569 818 957 205 281 478 243 355 569 531 009 014 294 396 029 989 323 458 370 272 363 789 697 847
377 918 004 627 261 972 300 522 860 963 430 188 014 469 571 032 370 210 731 429 486 826 971 087 657 206 874
943 272 061 640 623 987 557 094 887 613 852 696 778 811 157 441 340 853 962 926 337 520 115 148 836 769 445
988 233 125 009 483 952 012 302 172 579 530 032 307 635 303 155 863 716 399 116 598 534 830 664 888 583 231
773 102 601 086 174 711 858 848 815 850 407 320 927 563 428 130 060 223 365 430 572 120 467 350 570 152 603
350 231 440 346 873 333 094 699 042 533 632 227 451 846 721 076 635 199 173 032 777 008 404 158 778 513 268
246 908 864 997 950 242 405 891 714 936 975 002 551 849 652 248 955 028 379 675 910 699 731 293 164 494 596
297 116 974 028 599 975 856 021 267 971 626 065 214 089 489 112 153 513 857 259 651 132 918 643 026 035 507
549 778 764 648 804 140 234 035 926 750 381 427 599 637 824 932 934 397 313 432 898 745 883 276 882 362 157
333 522 995 845 709 356 274 988 051 392 625 898 518 958 258 890 975 116 547 558 058 006 620 850 293 977 968
899 344 236 484 381 495 819 098 207

18

332 373 802 764 254 726 952 142 108 449 288 975 077 409 022 440 215 889 128 896 371 026 756 038 406 938 881
000 207 118 464 693 531 227 748 974 631 167 330 797 155 852 570 707 148 110 760 666 359 986 751 174 763 571
994 883 995 175 768 933 254 772 693 461 983 052 776 665 450 220 495 192 007 415 228 758 717 047 214 195 599
929 843 972 847 438 064 006 055 450 586 782 871 433 833 352 957 107 453 145 994 350 152 081 456 801 493 766
696 183 684 868 230 020 177 407 082 993 843 727 803 559 556 863 361 350 947 610 757 030 553 708 230 650 876
408 568 209 455 436 977 236 556 460 901 949 310 892 122 127 350 117 384 993 918 160 789 651 057 629 917 262
040 674 464 321 264 453 832 960 247 611 005 802 650 808 126 495 360 461 762 410 232 552 364 992 003 776 342
199 374 130 847 673 102 973 483 536 794 668 507 399 345 037 510 415 317 410 105 439 497 527 999 952 143 309
755 981 533 945 251 733 550 360 623 888 025 016 053 387 879 628 239 955 146 219 418 994 023 384 133 816 702
053 630 173 890 682 552 789 762 394 299 567 390 752 681 302 113 264 110 840 170 118 853 141 947 134 820 645
446 123 193 152 249 754 659 896 246 633 563 582 322 504 645 819 979 997 901 537 945 466 826 775 232 743 230
607 150 872 704 926 873 431 282 489 464 672 883 745 669 600 080 008 388 421 559 193 783 516 773 079 680 247
894 569 758 782 803 131 272 407 476